

DOI: <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2020-29-4-85-95>

Концепция теоретико-эмпирического дуализма в обучении математике

Гефан Григорий Давыдович – канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: grigef@ Rambler.ru
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия
Адрес: 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15

Аннотация. Среди проблем математического образования в статье выделены: 1) недостаточное внимание, уделяемое фундаментальной, структурообразующей роли математики; 2) умозрительность обучения, его оторванность от практики. Сформулирована концепция теоретико-эмпирического дуализма в обучении как единство абстрактно-теоретической и опытно-экспериментальной познавательной деятельности обучающихся. По мнению автора, следует выделять априорное и апостериорное математическое знание. Априорное знание либо представляется индивиду совершенно очевидным, бесспорным, либо усвоено им некритически, «на веру». Апостериорное же математическое знание субъективно возникает в процессе напряжённой теоретической и практической деятельности обучающегося, активно и всесторонне проверяется экспериментально – либо с помощью приложений математики, либо путём математических экспериментов. Эмпирическая составляющая обучения математике подразумевает разнообразные формы и методы активного (в том числе, компьютерного) и профессионально ориентированного обучения, дающие опыт самостоятельного формулирования задач, совместного поиска путей их решения, взаимодействия и командной работы. Особое внимание при этом уделяется применению математических экспериментов в тех нередких случаях, когда требуется заменить или дополнить сложные доказательства, проиллюстрировать новые знания, дать навыки исследовательской работы. Продемонстрированы математические эксперименты по методу Монте-Карло, служащие, в частности, яркой, образной и убедительной формой подкрепления теоретических знаний в области стохастических разделов математики. В качестве наиболее высокой стадии теоретико-эмпирической деятельности обучающихся рассматривается исследовательская работа студентов. Предложена тематика исследовательской деятельности студентов в процессе или по завершении ими изучения вероятностно-статистических дисциплин.

Ключевые слова: математика, априорные и апостериорные знания, активные методы обучения, математические эксперименты, стохастика, исследовательская работа студентов

Для цитирования: Гефан Г.Д. Концепция теоретико-эмпирического дуализма в обучении математике // Высшее образование в России. 2020. Т. 29. № 4. С. 85-95.

DOI: <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2020-29-4-85-95>

Введение

В «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» (декабрь, 2013)¹ отмечено, что «изучение мате-

матики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других

¹ Концепция развития математического образования в Российской Федерации //

Российская газета. 2013. 27.12. URL: <https://rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html>

дисциплин». Проблемы развития математического образования по своему характеру могут быть разделены на три группы: мотивационные, содержательные и кадровые. Причины снижения мотивации к изучению математических дисциплин достаточно разнообразны. Это и недооценка важности обучения математике, и неудовлетворённость формой проведения занятий, и, наконец, недостаточное стимулирование студентов к хорошим результатам. Преподавание математических дисциплин студентам естественных, технических, экономических направлений подготовки часто строится на представлении о том, что математика есть лишь набор инструментов для количественного описания изучаемых явлений. Отсюда – огромное внимание, которое уделяется собственно технике математических расчётов, при явной недооценке важности сопоставления подходов, условий их применимости и, говоря шире, роли математики в точном формулировании содержания других наук. Иначе говоря, упускается из виду фундаментальная, структурообразующая роль математики. Сводить обучение математике к выработке вычислительных навыков означает потерю возможности глубокого понимания и постижения законов функционирования природных, технических, социально-экономических систем. Другим столь же распространённым недостатком обучения математике является высокая степень умозрительности. Термин «умозрение» (лат. *speculatio*) понимается как деятельность мышления, относящаяся к сфере явлений, не данных на опыте, а лишь предполагаемых. Умозрительность является синонимом таких понятий, как абстрактность, отвлечённость, теоретичность, оторванность от практики, от эксперимента.

Здесь необходимо следующее уточнение. Математика не без оснований считается абстрактной наукой, поскольку оперирует собственными понятиями, структурами и символами, не ассоциирующимися напрямую с реальными предметами. Однако это не означает, что математика не связана

с реальностью. Инструментом этой связи являются математические модели. Помимо этого, математические модели дают простор для экспериментов и, следовательно, позволяют преодолеть умозрительность представлений. Благодаря им обучение математике становится целостным процессом познания, в котором рациональное мышление взаимодействует с чувственным опытом.

Теоретико-эмпирический дуализм в обучении мы понимаем как единство абстрактно-теоретической и опытно-экспериментальной познавательной деятельности обучающихся. Следовательно, мы полагаем, что обучение математическим дисциплинам может и должно включать в себя не только теоретическую, но и эмпирическую (опытно-экспериментальную) компоненту. Это два начала, которые не сводятся друг к другу, а в чём-то и противоположны. Они должны дополнять друг друга и эффективно взаимодействовать. Целью данной статьи является обоснование заявленной концепции и демонстрация возможностей её практической реализации.

Априорные и апостериорные знания в математике

Объяснять, в чём состоит теоретическая компонента обучения математике, думается, нет необходимости. Но как понимать применительно к математике термин «эмпирический»? В настоящей работе этот термин имеет как узкое, так и широкое толкование. В узком смысле под эмпирической составляющей обучения математике мы будем подразумевать постановку математических экспериментов, которые применяются в учебном процессе в тех случаях, когда требуется заменить или дополнить сложные доказательства, проиллюстрировать новые знания, дать навыки исследовательской работы [1; 2]. Особенно интересны и полезны эксперименты по методу Монте-Карло, реализуемые с помощью персональных компьютеров [3].

В широком смысле эмпирическая составляющая обучения подразумевает разно-

образные формы и методы активного (в том числе компьютерного) и профессионально ориентированного обучения [4]. Эти методы отличаются стимулированием обучающихся к выбору вариантов разрешения проблемных ситуаций, вариантов принятия решений [5; 6]. При применении активного обучения часто имитируется профессиональная деятельность специалистов, создаётся эмоционально напряжённая, состязательная атмосфера [7–11]. В некоторых случаях преподаватель лишь разрабатывает план, согласно которому студенты изучают материал в процессе совместного выполнения обучающих заданий, и направляет эту деятельность. Такие занятия, дающие опыт самостоятельного формулирования задач, совместного поиска путей их решения, взаимодействия и командной работы, можно считать формами как теоретической, так и эмпирической деятельности. Подобный подход к обучению Конфуций описал следующей фразой: «Скажи мне – и я забуду, покажи мне – я запомню, дай мне сделать – и я пойму».

Априорное знание – это знание, полученное до опыта и независимо от него. Само это понятие связано в первую очередь с теорией познания И. Канта. Согласно Канту, аналитическое суждение не даёт новой информации об объективной реальности. Его истинность устанавливается без сопоставления с ней. По Канту, аналитические суждения априорны. Их значение состоит в том, что они помогают осознанию и упорядочению уже имеющихся знаний. Синтетическое суждение расширяет и дополняет информацию об объекте. Его истинность может быть установлена только при обращении к реальному миру. В начале XX в. утвердилась аналитическая интерпретация понятия «априори». Так, высказывания логики и математики являются аналитическими и априорными, а высказывания естествознания – синтетическими и эмпирическими. Иными словами, аналитическое суждение признаётся истинным только на основании его смысла, тогда как для определения истинности синтетиче-

ского суждения требуется провести эмпирическое исследование.

Итак, выходит, что математико-логическое знание всегда следует считать априорным? Такой точки зрения придерживаются далеко не все учёные [12]. В частности, авторы работы [13] пишут о том, что математика должна приблизиться к опытным наукам по характеру своего метода и обоснования. Они ссылаются на мнения известных математиков Д. Пойа и Л. Кальмара, которые, отрицая огромной роли дедукции в математике, всё же считали её индуктивной наукой, ибо она, подобно другим наукам, окончательно базируется на практике и проверяется ею.

Здесь нельзя не сказать о точке зрения известного российского математика, академика В.И. Арнольда [14; 15]. Описывая свою «дуэль» с французским математиком Ж.-П. Серром, Арнольд критикует подход к математике Д. Гильберта и Бурбаки, благодаря которому в преподавании школьной математики происходит подмена содержательной науки об устройстве мира жонглированием логическими символами. Арнольд приводит любопытный случай. Французский министр просвещения (геофизик), желая понять, как учат математике детей, спросил одного отличника-младшеклассника: сколько будет $2+3$? Выяснилось, что бурбакисты-учителя не научили мальчика счёту, и ответить на прямой вопрос он не смог. Зато он ответил так, как от него требовали в школе: это будет $3+2$, так как сложение коммутативно. Очевидно, Арнольд приводит этот случай как образец оторванного от жизни, схоластического знания. Сам В.И. Арнольд считал математику частью теоретической физики (!). В другом своём высказывании, всё же разделив математику и физику, он обе эти науки назвал экспериментальными, добавив лишь, что в физике эксперименты обходятся неизмеримо дороже.

По нашему мнению, для человека, изучающего математику, субъективно-психологически априорным выглядит то знание, ко-

торое либо представляется ему совершенно очевидным, бесспорным, либо усвоено им не критически, «на веру». Апостериорным же математическое знание может предстать для индивида, если это знание: 1) субъективно возникает в процессе напряжённой теоретической и практической деятельности обучающегося, в результате его интеллектуальных усилий по усвоению результатов, полученных до него другими людьми; 2) проверяется экспериментально – либо с помощью так называемых приложений математики, либо с помощью математических экспериментов.

Возможен ли в математике эксперимент?

В связи с неоднократным упоминанием об экспериментах при обучении математическим дисциплинам необходимо уточнить само это понятие. Как известно, научный эксперимент является частью исследования, служит для проверки гипотезы, установления причинных связей между явлениями. Чаще всего понятие «эксперимент» связывается с естественными или техническими науками: химией, биологией, медициной, различными областями физики и техники и др. Однако в обучении различным наукам эксперименты имеют другую цель: на собственном опыте убедиться в верности изучаемой теории и сделать первые шаги в исследовательской деятельности. Эксперимент, на наш взгляд, является самой яркой, образной и убедительной формой подкрепления теоретических знаний.

В математическом моделировании существует понятие «численный (вычислительный) эксперимент». В этом случае реальный физический (или, например, социально-экономический) объект исследуется посредством созданной человеком модели, которая всегда является не совсем полной и не совсем точной.

Однако под математическим экспериментом можно подразумевать и нечто принципиально иное – «идеальный» эксперимент, служащий проверкой и иллюстрацией мате-

матической теории. Строгие доказательства теорем – неотъемлемый элемент построения математических теорий, но далеко не всегда удачный (по крайней мере, не всегда достаточный) способ обучения математике. А.Н. Посицельская в своей работе [2] излагает причины, в силу которых доказательства могут нуждаться в экспериментальной поддержке. Это, в первую очередь, такие ситуации, когда утверждение не является интуитивно понятным или даже выглядит противоречащим интуиции, а его доказательство – весьма сложным. К сожалению, в подобных случаях доказательство не убеждает обучающихся, поскольку кажется им не более чем игрой ума или каким-то «фокусом». В качестве примера она приводит так называемый второй замечательный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Интуитивно кажется, что этот предел должен быть равен 1, потому что такой результат получается, если показателем степени будет не n , а какое-нибудь «большое» (но конечное) число (например, 100). Целесообразно поручить студентам вычисление членов последовательности, которое убедит их в том, что на самом деле предел равен не 1, а числу e .

Экспериментальная работа по математике может быть организована на практическом занятии и даже в паузах на лекции, но, разумеется, лучшим способом является лабораторная работа на компьютере [3]. Наиболее эффективен этот метод при изучении таких дисциплин, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимизации», «Теория игр», «Численные методы».

Стохастические эксперименты

Для лучшего освоения теоретического материала вероятностно-статистических дисциплин интересны и полезны эксперименты по методу Монте-Карло [3]. «Теория вероятностей и математическая статистика» –

это единая, неразрывная дисциплина. Традиционно считается, что поскольку математическая статистика во многих своих разделах опирается на теорию вероятностей, в образовательном процессе эти науки должны изучаться в строгой последовательности: сначала теория вероятностей, затем – математическая статистика. На первых занятиях студент погружается в абстрактные схемы: комбинаторные расчёты числа возможных и благоприятных исходов, алгебру событий, теоремы о вероятности и т.д. Между тем известно, что теория вероятностей возникла из рассмотрения эмпирических фактов и свойств реальных событий, и, следовательно, её осознание может и должно опираться на наблюдение, опыт, эксперимент. Поэтому целесообразно быстрое ознакомление обучающихся не только с теоретико-вероятностными, но и со статистическими характеристиками. В такой парадигме вопрос о том, что первично: вероятностные или статистические понятия, образно говоря, напоминает «проблему курицы и яйца». Результаты, получаемые в рамках вероятностной теории, могут быть статистически обоснованы, если параллельно с изучением классического определения и основных теорем о вероятности (а не в конце курса, как это принято) ознакомить студентов с простейшей формой закона больших чисел. Это позволит придать понятию «вероятность события» наглядное статистическое содержание. Математикам XVII–XIX вв. для этой цели пришлось бы использовать игральные кости или рулетку, но в наше время существуют несравнимо большие возможности. Идея состоит в том, чтобы применить персональный компьютер для моделирования случайных событий и случайных величин методом Монте-Карло. Реализовать описанную методику можно за счёт введения в учебный процесс лабораторного компьютерного практикума, в котором, на наш взгляд, следует совместить четыре подхода к математическому моделированию: аналитический, имитационный, численный и аналитико-статистический [16].

Приведём лишь два небольших примера. Рассматривается следующая случайная величина: число «шестёрок», выпавших при бросании 600 игровых костей. Требуется различными способами построить распределение её вероятностей. Строго говоря, эта величина имеет биномиальное распределение, которое описывается формулой Бернулли. Формула Пуассона в этом случае, как можно убедиться практически, является лишь грубым приближением, т.к. условия её применимости не совсем выполнены (вероятность появления «шестёрки» при бросании одной кости не является малой величиной). Весьма точные результаты даёт локальная теорема Лапласа. В силу центральной предельной теоремы распределение случайной величины является близким к нормальному и может быть смоделировано различными способами, в том числе и с помощью метода Монте-Карло. Также этим методом можно и непосредственно разыграть случайное событие – появление «шестёрки» при бросании игровой кости – и, повторив этот опыт 600 раз (на компьютере это делается очень быстро), применить статистическое определение вероятности. Итак, существует минимум пять различных подходов, позволяющих с большей или меньшей точностью решить данную задачу. Такое сопоставление способствует пониманию взаимосвязей различных положений теории и компетентному использованию различных методов с учётом условий их применимости.

На наш взгляд, при изучении методов математической статистики особое внимание должно уделяться не формально-вычислительной, а логико-математической, содержательной стороне. В частности, необходимо обоснование свойств оценок (несмещённости, состоятельности, эффективности). Однако, поскольку соответствующие теоретико-вероятностные обоснования весьма сложны, они могут быть заменены экспериментами по методу Монте-Карло. Это является дополнительным аргументом в пользу компьютерного сопровождения обучения

стохастическим дисциплинам. Например, для оценивания дисперсии количественного признака в генеральной совокупности используются выборочная дисперсия

$$D = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

и исправленная дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D,$$

причём вторая оценка, в отличие от первой, является несмещённой. Теоретическое доказательство этого факта достаточно трудоёмко. Преподаватели обоснованием данного положения обычно пренебрегают, и оно воспринимается студентами на веру, то есть поверхностно. Большинство студентов просто считают первую оценку «не совсем точной», а вторую – «более точной». На самом деле, мы никогда не знаем, насколько точна та или иная оценка, полученная по конкретной выборке, ибо значение генеральной характеристики нам неизвестно. В рамках эксперимента мы можем имитировать поведение случайной величины с известным законом распределения. Студенты получают следующее задание. Сгенерировать 100 выборок (объёма $n = 5$ каждая) случайных чисел, равномерно распределённых в интервале $(0,1)$. Для каждой выборки вычислить выборочную дисперсию D и исправленную дисперсию s^2 и сравнить эти оценки с известной генеральной дисперсией равномерного распределения, которая в данном случае равна $1/12$. Результаты описанного эксперимента могут показаться неожиданными: в 40% случаев смещённая оценка D оказывается более точной оценкой, чем s^2 . Однако если усреднить значения оценок по всем проведённым опытам, то именно несмещённая оценка s^2 практически совпадёт с генеральной дисперсией. Постановка такого эксперимента осуществляется в считанные минуты, а для его повторения требуется одно нажатие клавиши.

Компьютерное моделирование случайных процессов может выполняться с использованием ещё более широкого спектра методов.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающая динамику распределения вероятностей по состояниям в случайном процессе с непрерывным временем, с помощью дискретизации времени может быть сведена к системе разностных уравнений и решена численно. При имитационном моделировании случайного процесса методом статистических испытаний (методом Монте-Карло) создаётся алгоритм, позволяющий при большом числе реализаций приближённо оценить вероятностные характеристики процесса. Численная и имитационная разновидности моделирования возможны лишь при активном использовании персонального компьютера. Не менее интересные и значительно более сложные эксперименты могут быть поставлены при изучении теории игр [17], а также эконометрики.

Значение экспериментов при изучении математических дисциплин состоит и в том, что они показывают действие законов математики с непреложной необходимостью. Разумеется, когда мы имеем дело со стохастическими явлениями, определённую роль играет случай, однако при большом числе наблюдений случайности компенсируют друг друга и результат становится почти детерминированным. Необходимо также понимать, что компьютер здесь является лишь средством быстрой реализации и визуализации положений математической теории. Важность понимания теории при этом несколько не умаляется.

Исследовательская деятельность студентов при обучении математике

Исследовательская деятельность студентов является продолжением и углублением учебного процесса. Она может быть включена в учебный план (например, реферат, курсовая или дипломная работы) либо проводится по собственной инициативе студента с представлением результатов работы на научных семинарах, конференциях, конкурсах и т.д. Для первых трёх курсов подготовки бакалавров наиболее характер-

на учебно-исследовательская деятельность, в ходе которой осваиваются и осознаются основные научные понятия и действия, и исследовательская деятельность под руководством преподавателя, когда студент учится использовать полученные знания для решения поставленной перед ним научной задачи [18]. Исследовательскую деятельность можно рассматривать и как актуализацию тех академических знаний, которые получены студентами на лекциях, практических занятиях, а также при выполнении типовых самостоятельных работ.

Прежде всего, необходимо провести определённое разграничение между учебно-исследовательской деятельностью студентов и их обычной учебной работой. Основное различие, на наш взгляд, состоит в том, что исследовательская задача – это творческая задача с заранее неизвестным решением. С этой точки зрения, например, изучение доказательства теоремы – это учебная задача, не облечённая в форму исследования (что несколько не умаляет несомненной важности разбора доказательств для развития логики у студентов), а различные проблемно-поисковые методы обучения математике, контекстное, профессионально ориентированное обучение сближаются с исследовательской деятельностью.

Иными словами, учебно-исследовательская работа вносит творческую составляющую в занятия по учебному плану, при этом учитываются склонности и интересы студентов [19], и в частности профессиональная направленность обучения. Осуществление учебно-исследовательской деятельности прививает студентам первоначальные навыки исследовательской работы, расширяет кругозор, развивает творческое, аналитическое мышление и культуру дискуссии. По мере обучения они от частных учебно-исследовательских задач переходят к такой деятельности, которая предполагает наличие основных этапов исследования в научной сфере: постановка проблемы, изучение теории вопроса, сбор и анализ материала, под-

бор и освоение методик исследования, проведение итогов и интерпретация результатов. При этом руководитель исследовательской деятельности студентов должен учитывать, что при всём её сходстве с подлинно научной работой между ними существует серьёзное различие. Научная деятельность нацелена на поиск и приращение объективно нового научного знания, тогда как исследовательская деятельность студента в большей степени направлена на развитие самого субъекта, на наделение его способностями для последующей профессиональной деятельности.

Математические дисциплины обычно изучаются на первых двух курсах, когда студент ещё достаточно туманно представляет себе свою будущую специальность. Тем не менее во многих отношениях весьма желательно, чтобы и учебно-исследовательские задачи, и (в ещё большей степени) исследовательская деятельность студента под руководством преподавателя-математика осуществлялись в контексте профессиональной подготовки студента. В этом нет ничего невозможного, поскольку математика предоставляет огромный арсенал приёмов и методов, которые могут использоваться в других предметных областях: в технике, на транспорте, в информационных технологиях, в экономике и т.д. Однако, как правильно отмечено в работе [20], при этом возникают две проблемы:

- 1) наполнить математические абстракции ярким и понятным содержанием, желательно связанным с будущей профессией студента, что повысит его познавательную активность (проблема содержательной интерпретации математического материала);

- 2) научить студента умению переводить специфическую задачу (техническую, транспортную, информационную, экономическую, управленческую и т.д.) на язык математики, т.е. строить математическую модель (проблема математизации профессиональных задач).

На наш взгляд, к обеим проблемам следует приступать на этапе учебно-исследовательской деятельности студентов, однако

полноценное решение второй из названных проблем возможно лишь на более позднем этапе – в процессе исследовательской деятельности студента под руководством преподавателя.

Темы исследовательской деятельности студентов могут выходить за рамки программы подготовки бакалавров, однако их опережающее освоение существенно облегчает в дальнейшем обучение в магистратуре и научно-исследовательскую деятельность. Одними из наиболее востребованных методов математики являются вероятностно-статистические методы, изучаемые в таких дисциплинах, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы и теория массового обслуживания», «Теория игр», «Эконометрика». Актуальными темами исследовательской деятельности студентов при этом могут являться:

- 1) освоение метода Монте-Карло и моделирование работы систем массового обслуживания;
- 2) оценка погрешностей, проверка статистических гипотез и дисперсионный анализ результатов эксперимента;
- 3) самостоятельное построение сложных регрессионных моделей;
- 4) исследования, связанные с использованием данных временных рядов;
- 5) экспериментальная проверка теории матричных игр и др.

Выводы

Реализация концепции теоретико-эмпирического дуализма в обучении математике, сформулированной и обоснованной в данной работе, требует от преподавателей отхода от традиционных объяснительно-иллюстративных форм обучения в пользу активных и интерактивных форм и методов, таких как проблемно-поисковое обучение, деловые игры, компьютерное обучение и др.

Продemonстрирована особая роль математических экспериментов, которые следует рассматривать как средство визуализации учебного материала и пробуждения позна-

вательного интереса обучающихся, как одну из форм учебно-исследовательской деятельности, формирующей навыки самостоятельной исследовательской работы.

Литература

1. Шабат Г.Б. «Живая математика» и математический эксперимент // Вопросы образования. 2005. № 3. С. 156–165.
2. Посищельская Л.Н. Математический эксперимент как поддержка доказательства при изучении математики в вузе // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 43–48.
3. Гефан Г.Д., Кузьмин О.В. Активное применение компьютерных технологий в преподавании вероятностно-статистических дисциплин в техническом вузе // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014. № 1 (27). С. 57–61.
4. Silberman M. Active learning: 101 strategies to teach any subject. Boston, Allyn and Bacon Publ., 1996. 189 p.
5. Hmelo-Silver C.E. Problem-based learning: what and how do students learn? // Educational Psychology Review. 2004. Vol. 16. No. 3. P. 235–266.
6. Зимина О.В. Проблемное обучение высшей математике в технических вузах // Математика в высшем образовании. 2006. № 4. С. 55–78.
7. Garris R., Ablers R., Driskell J.E. Games, motivation, and learning: a research and practice model // Simulation Gaming. 2002. Vol. 33. No. 4. P. 441–467.
8. Сахарова О.Н. Методика организации деловых игр по математике // Alma mater (Вестник высшей школы). 2008. № 7. С. 38–44.
9. Burguillo J.C. Using game theory and competition-based learning to stimulate student motivation and performance // Computers & Education. 2010. Vol. 55. P. 566–575.
10. Суханов М.Б. Деловые игры с математическим моделированием как средство формирования профессиональной компетентности студентов экономического профиля // Известия Российского государственного педагогического университета. 2012. № 152. С. 195–202.
11. Cagiltay N., Ozcelik E., Ozcelik N.S. The effect of competition on learning in games // Computers & Education. 2015. Vol. 87. P. 35–41.

12. Яшин Б.А. Априорное и апостериорное в познании: история и современные подходы // Проблемы современного образования. 2016. № 5. С. 9–24.
 13. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1981. 217 с.
 14. Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сёстры? // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311–1323.
 15. Арнольд В.И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник РАН. 2002. Т. 72. № 3. С. 245–250.
 16. Gefan Г.Д., Ширяева Н.К. Вероятность, случайные процессы, математическая статистика. Иркутск: ИрГУПС, 2013. 136 с.
 17. Gefan Г.Д. Обучение математической теории игр с применением игровых и компьютерных технологий // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2017. № 2 (40). С. 26–33.
 18. Зимняя И.А. Исследовательская деятельность студентов в вузе как объект проектирования в компетентностно-ориентированной ООП ВПО. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2010. 40 с.
 19. Биштова Э.А. Научно-исследовательская деятельность как фактор профессионального развития студента // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2008. Вып. № 49. С. 253–257.
 20. Шармина Т.Н., Шармин Д.В. Возможности формирования познавательной компетентности у студентов при обучении математике // Альманах современной науки и образования. 2013. № 10 (77). С. 180–183.
- Статья поступила в редакцию 13.08.19*
Принята к публикации 10.03.20

The Concept of Theoretical-Empirical Dualism in Teaching Math

Grigoriy D. Gefan – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., the Department of Mathematics, e-mail: grigef@rambler.ru

Irkutsk State Railway University, Irkutsk, Russia

Address: 15, Chernyshevsky str., Irkutsk, 664074, Russian Federation

Abstract. Among the problems of mathematical education, the article highlights: (1) insufficient attention paid to the fundamental, structure-forming role of mathematics; (2) speculative learning, its isolation from practice. The concept of theoretical-empirical dualism in teaching is formulated as the unity of the abstract-theoretical and experimental-empirical cognitive activity of students. According to the author, a priori and a posteriori mathematical knowledge should be distinguished. A priori knowledge either seems to an individual to be completely obvious, indisputable, or he assimilates it uncritically, “on faith”. A posteriori mathematical knowledge subjectively arises in the process of student’s intense theoretical and practical activity, and is being actively and comprehensively verified experimentally – either using mathematical applications, or through mathematical experiments. The empirical component of teaching mathematics implies a variety of forms and methods of active (including computer) and professionally oriented learning, giving experience in independent formulation of problems, joint search for ways to solve them, interaction and teamwork. Particular attention is paid to the use of mathematical experiments in those frequent cases when it is necessary to replace or supplement complex evidence, illustrate new knowledge, and give research skills. Monte Carlo mathematical experiments are demonstrated, which serve, in particular, as a bright, figurative, and convincing form of reinforcing theoretical knowledge in the field of stochastic branches of mathematics. The research work of students is considered as the highest stage of the students’ theoretical-empirical activity. The article proposes subjects of research activities of students in the process or upon completion of the study of probabilistic and statistical disciplines.

Keywords: mathematics, a priori knowledge, a posteriori knowledge, active teaching methods, mathematical experiments, stochastics, student research

Cite as: Gefan, G.D. (2020). The Concept of Theoretical-Empirical Dualism in Teaching Math. *Vysshee obrazovanie v Rossii = Higher Education in Russia*. Vol. 29, no. 4, pp. 85-95. (In Russ., abstract in Eng.)

DOI: <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2020-29-4-85-95>

References

1. Shabat, G.B. (2005). "Living Mathematics" and a Mathematical Experiment. *Voprosy obrazovaniya = Educational Studies*. No. 3, pp. 156-165. (In Russ.)
2. Positselskaya, L.N. (2012). Mathematical Experiment as a Proof Support When Studying Mathematics. *Matematika v vysshem obrazovanii = Mathematics in Higher Education*. No. 10, pp. 43-48. (In Russ., abstract in Eng.)
3. Gefan, G.D., Kuzmin, O.V. (2014). Active Use of Computer Technology in Teaching Probabilistic and Statistical Disciplines in Technical University. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta = Bulletin of Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafiev*. Vol. 27. No. 1, pp. 57-61. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Silberman, M. (1996). *Active Learning: 101 Strategies to Teach Any Subject*. Boston: Allyn and Bacon Publ., 189 p.
5. Hmelo-Silver, C.E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*. Vol. 16, no. 3, pp. 235-266.
6. Zimina, O.V. (2006). The Problem-Oriented Mathematical Education in Technical Universities. *Matematika v vysshem obrazovanii = Mathematics in Higher Education*. No. 4, pp. 55-78. (In Russ., abstract in Eng.)
7. Garri, R., Ahlers, R., Driskell, J.E. (2002). Games, Motivation, and Learning: A Research and Practice Model. *Simulation Gaming*. Vol. 33, no. 4, pp. 441-467.
8. Sakharova, O.N. (2008). Methodology for Organizing Business Games in Mathematics. *Alma Mater (Vestnik vysshei shkoly) = Alma Mater (Higher School Herald)*. No. 7, pp. 38-44. (In Russ.)
9. Burguillo, J.C. (2010). Using Game Theory and Competition-based Learning to Stimulate Student Motivation and Performance. *Computers & Education*. Vol. 55, pp. 566-575.
10. Sukhanov, M. (2012). Business Games with Mathematical Modelling as a Means for Development of Professional Competence of Economics Students. *Izvestiya rossiiskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta = Izvestia: Herzen University Journal of Humanities and Science*. No. 152, pp. 195-202. (In Russ., abstract in Eng.)
11. Cagiltay, N., Ozcelik, E., Ozcelik, N.S. (2015). The Effect of Competition on Learning in Games. *Computers & Education*. Vol. 87, pp. 35-41.
12. Yashin, B.L. (2016). A Priori and A Posteriori in Cognition: Background and Modern Approach. *Problemy sovremennoy obrazovaniya = Problems of Modern Education*. No. 5, pp. 9-24. (In Russ., abstract in Eng.)
13. Belyaev, E.A., Perminov, V.Ya. (1981). *Filosofskie i metodologicheskie problemy matematiki* [Philosophical and Methodological Problems of Mathematics]. Moscow: Moscow University Publ., 217 p. (In Russ.)
14. Arnol'd, V.I. (1999). Mathematics and Physics: Mother and Daughter or Sisters? *Uspekhi fizicheskikh nauk = Advances in Physical Sciences*. Vol. 169, no. 12, pp. 1311-1323. (In Russ., abstract in Eng.)
15. Arnol'd, V.I. (2002). A Mathematical Duel Around Bourbaki. *Vestnik RAN = Bulletin of the Russian Academy of Sciences*. Vol. 72, no. 3, pp. 245-250. (In Russ.)

16. Gefan, G.D., Shiryayeva, N.K. (2013). *Veroyatnost, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika* [Probability, Random Processes, Mathematical Statistics]. Irkutsk: IrGUPS Publ., 136 p. (In Russ.)
17. Gefan, G.D. (2017). Teaching the Mathematical Theory of Games with the Use of Game and Computer Technologies. *Vestnik moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya = Vestnik of Moscow City University. Series: Informatics and Informatization of Education*. No. 2 (40), pp. 26-33. (In Russ., abstract in Eng.)
18. Zimnyaya, I.A. (2010). *Issledovatel'skaya deyatel'nost' studentov v vuze kak ob'ekt proektirovaniya v kompetentnostno-orientirovannoi OOP VPO* [The Research Activity of Students at a University as a Design Object in a Competency-Oriented OOP HPE]. Moscow: Research Center for the Problems of Quality of Training of Specialists Publ., 40 p. (In Russ.)
19. Bishtova, E.A. (2008). Research Activity as a Factor of Professional Development of a Student. *Izvestiya RGPU im. A.I. Gertsena = Izvestia: Herzen University Journal of Humanities and Science*. No. 49, pp. 253-257. (In Russ., abstract in Eng.)
20. Sharmina, T.N., Sharmin, D.V. (2013). Possibilities of Students' Cognitive Competence Formation While Teaching Mathematics. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya = Almanac of Modern Science and Education*. No. 10 (77), pp. 180-183. (In Russ., abstract in Eng.)

The paper was submitted 13.08.19

Accepted for publication 10.03.20



Science Index РИНЦ-2018

ВОПРОСЫ ФИЛОСОФИИ	10,602
ВОПРОСЫ ОБРАЗОВАНИЯ	9,420
СОЦИОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	7,608
ПСИХОЛОГИЧЕСКАЯ НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ	4,363
ФИЛОСОФСКИЕ НАУКИ	3,246
ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА	2,649
ЭПИСТЕМОЛОГИЯ И ФИЛОСОФИЯ НАУКИ	2,229
ИНТЕГРАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ	2,024
ПЕДАГОГИКА	1,420
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ В РОССИИ	1,252
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ: ПРАКТИКА И АНАЛИЗ	1,043
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ СЕГОДНЯ	0,980
АЛМА МАТЕР	0,544
ИНЖЕНЕРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ	0,343