

«Каждый человек может овладеть правильным использованием математических методов»: актуальность идей Л.Д. Кудрявцева для современного математического образования

Научная статья

DOI: 10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100

Семёнов Алексей Львович – академик РАН, академик РАО, профессор, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов, ORCID: 0000-0002-1785-2387, SPIN-код 2289-1720, Author ID 113589, alexei.semenov@math.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Адрес: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Абылкасымова Алма Есимбековна – академик РАО, академик Национальной академии наук Республики Казахстан, д-р пед. наук, профессор, директор Центра развития педагогического образования, заведующая кафедрой методики преподавания математики, физики и информатики, ORCID: 0000-0003-1845-7984, SPIN-код: 5081-2546, Author ID: 253848, aabylkassymova@mail.ru

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан

Адрес: 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, пр. Достык, д. 13

Аннотация. Статья посвящена раскрытию ряда идей профессора-математика члена-корреспондента АН СССР Льва Дмитриевича Кудрявцева, посвящённых преподаванию математики. В основе этих идей лежит более чем полувековой практический опыт его работы в Московском физико-техническом институте – в ряде статей он представил своё видение проблем воспитания обучающихся, единства математики, а также методики её преподавания. Мысли и идеи Л.Д. Кудрявцева являются актуальными и в настоящее время, в век цифровой трансформации системы образования и всей жизни общества.

Ключевые слова: методика преподавания математики, содержание образования, воспитание математикой, результативное образование, цифровая трансформация, преадаптивность

Для цитирования: Семёнов А.А., Абылкасымова А.Е. «Каждый человек может овладеть правильным использованием математических методов»: актуальность идей Л.Д. Кудрявцева для современного математического образования // Высшее образование в России. 2024. Т. 33. № 4. С. 84–100. DOI: 10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100

“Everyone Can Master the Correct Use of Mathematical Methods”: The Relevance of L.D. Kudryavtsev’s Ideas for Modern Mathematics Education

Original article

DOI: 10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100

Alexei L. Semenov – Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Professor, Dr. Sci. (Mathematics), Head of the Department of Mathematical Logics and the Theory of Algorithms, ORCID: 0000-0002-1785-2387, SPIN-code 2289-1720, Author ID 113589, alexei.semenov@math.msu.ru

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Address: 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Alma E. Abylkassymova – Academician of the Russian Academy of Education, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Dr. Sci. (Pedagogical Sciences), Professor, Director of the Center for the Development of Pedagogical Education, Head of the Department of Methods of Teaching Mathematics, Physics and Informatics, ORCID: 0000-0003-1845-7984, SPIN-code 5081-2546, Author ID 253848, aabylkassymova@mail.ru

Abay University, Almaty, Republic of Kazakhstan

Address: 13 Dostyk ave., Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan

Abstract. The article discusses the ideas, devoted to mathematics education, of Lev D. Kudryavtsev, corresponding member of the USSR Academy of Sciences, professor-mathematician. These ideas are based on more than half a century of practical experience of L. D. Kudryavtsev at the Moscow Institute of Physics and Technology – he presented his vision of the problems of educating students, the unity of mathematics, as well as methods of teaching it in the collection of articles. The thoughts and ideas of L. D. Kudryavtsev are still relevant today, in the age of digital transformation of the education system and of the entire life of society.

Keywords: methods of teaching mathematics, content of education, education in mathematics, effective education, digital transformation of education, pre-adaptiveness

Cite as: Semenov, A.L., Abylkassymova, A.E. (2024). “Everyone Can Master the Correct Use of Mathematical Methods”: The Relevance of L.D. Kudryavtsev’s Ideas for Modern Mathematics Education. *Vysshee obrazovanie v Rossii = Higher Education in Russia*. Vol. 33, no. 4, pp. 84-100, doi: 10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100 (In Russ., abstract In Eng.).

Введение

Лев Дмитриевич Кудрявцев, член-корреспондент АН СССР, известен своими результатами в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, топологии, прикладной математики. Однако данную статью авторы посвятили не его математическим работам, а взглядам учёного на образование, прежде всего – университетское, а также на всю образователь-

ную проблематику. Взгляды эти он реализовывал в качестве профессора и в течение 35 лет заведующего кафедрой высшей математики ведущего в стране вуза по подготовке научно-технологических кадров – Московского физико-технического института.

Профессор Л.Д. Кудрявцев внёс фундаментальный вклад в развитие математического образования в СССР. Его учебник «Математический анализ» широко известен

и принят в качестве основного в ряде высших учебных заведений страны. Система преподавания математики, выработанная под его руководством в МФТИ, с большим удельным весом самостоятельной работы студентов оказалась результативной и хорошо зарекомендовала себя в таких крупнейших вузах, как Московский энергетический институт, Новосибирский электротехнический институт и др.

Статьи Л.Д. Кудрявцева, посвящённые образовательной тематике, в основном собраны в отдельном издании [1]. Ценным является то, что они представляют собой анализ и обобщение опыта выдающегося университетского педагога, одновременно являющегося профессионалом высшей лиги – представителем Московской математической школы, продолжателем традиции академиков Н.Н. Лузина, А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского – учителя Л.Д. Кудрявцева. Проблематику его образовательных трудов можно охарактеризовать следующими словами академика П.С. Александрова из его предисловия к сборнику статей Л.Д. Кудрявцева: *«Принципиальными моментами проблемы математического образования являются: выбор объёма и содержания математических курсов, определение целей обучения, правильное сочетание широты и глубины изложения, строгости и наглядности, т.е. выбор наиболее эффективных и рациональных путей обучения, и всё это с учётом ограниченного времени, отводимого на изучение математики»* [1, с. 3].

Также важны представления Л.Д. Кудрявцева о том, что нет «чистой» и прикладной математики, что, несмотря на внешнюю разобщённость своих частей, математика едина и её единство лежит в самой сущности математики.

По мнению авторов, в настоящее время взгляды и труды Л.Д. Кудрявцева очень актуальны для систем образования Российской Федерации и Республики Казахстан [2; 3]. Лев Дмитриевич адресовал свои труды прежде всего работникам высшей школы – преподавателям математики. Однако,

сформулированные им положения значимы и для работников общего и дополнительного образования, и не только в области математических дисциплин.

Целью статьи является раскрытие идей Кудрявцева Л.Д. в деле воспитания обучающихся через преподавание математики, которые очень актуальны и в настоящее время.

Социальный контекст формирования образовательной философии

Свои рассуждения образовательных принципов Лев Дмитриевич предваряет словами: *«Мало что подвергается такой постоянной критике, как существующая система образования. Здесь каждый чувствует себя компетентным, многие любят выступать с поучениями и стараются навязать свою точку зрения»* [1, с. 11].

Стоит отметить, что описанная Л.Д. Кудрявцевым проблема является универсальной как для российского образования, так и для образования многих других стран. Особенно значимой эта проблема стала сегодня. Дело в том, что область образования традиционно была устроена как передача следующему поколению того, что знало предыдущее. Но, начиная со второй половины XX века и особенно в последние годы эта миссия образования перестала быть бесспорной. Элвин Тоффлер в какой-то момент в 1960-х годах придумал термин «шок будущего» [4]. Шок состоит в том, что человек живёт и работает не в том мире, в котором он родился и жили его родители, а в совершенно ином мире. И от этого у человека возникает шок: на него будущее «упало», и он не понимает, что делать с этим будущим, которое сегодня с ним происходит.

Естественно считать, что всё более ускоряющиеся изменения должны отразиться на системе образования. Если в прошлом главной задачей образования была трансляция мудрости и культуры предшествующих поколений поколениям следующим, то сейчас важнейшей задачей образования должна стать передача сегодняшнего знания. Конечно, ещё более

желательно говорить о передаче завтрашнего знания. Буквально эта передача невозможна, но возможна подготовка к жизни в будущем, только возникающем, формирующимся и постоянно меняющемся мире. Эта подготовка не может ограничиваться только трансляцией прошлого (хотя, конечно, будущее строится на фундаменте прошлого).

Однако граждане, занимающие важное положение в общественной иерархии, принимающие решения, в том числе – и затрагивающие судьбу образования, как правило считают, что лучшим вариантом изменения образования был бы возврат к образованию их собственного детства и юности (реже – к ещё более ранним эпохам). При этом эти же люди объективно рассматривают необходимость инноваций в производстве, исследованиях, управлении. Ещё раз нужно подчеркнуть, что столетия назад такой «взгляд в прошлое» мог не сильно противоречить потребностям завтрашнего дня, но сегодня это делает всё большую часть школьного образования, копирующей прошлое, ненужной.

Одним из источников такой ретроградной позиции является следующий парадокс, являющийся вариантом известной «ошибки выжившего». Упомянутый выше гипотетический гражданин, весьма вероятно, получил действительно хорошее образование, существенно превосходящее по уровню среднее образование своего детства. Это может быть следствием воспитания, атмосферы в семье и её социальном круге, выбора замечательной школы, прекрасного учителя, социальной среды в классе, друзей, усиливающимися возникшей и поддерживаемой всеми этими факторами мотивацией будущего академика или депутата. Поэтому, когда он говорит о том, что его дети, внуки и правнуки получают худшее образование, это с большой вероятностью соответствует действительности. У этих представителей следующих поколений просто отсутствовали некоторые (или все) из перечисленных факторов. Таким об-

разом, хорошее образование сыграло существенную роль в том, что упомянутый гражданин «выжил» и сегодня занял указанную важную позицию в обществе. Но это совсем не значит, что средний уровень преподавания в его детстве был существенно выше, чем средний уровень преподавания сегодня, если судить об этом уровне по критериям его детства. Ситуация усугубляется тем, что в силу описанных выше причин планируемые и реально достигаемые результаты образования сегодня имеют меньше отношения к сегодняшнему и завтрашнему миру, чем это было раньше. Это естественно приводит к снижению мотивации к школьному образованию в его существующем виде. (Один из многих симптомов этого – переход большей части выпускников 9-го класса из «академического трека» 11-летки на «профессиональный» – в СПО. Другой симптом – повышенный спрос на домашнее образование, а также переход в 11-м классе на подготовку исключительно по предметам ЕГЭ.) Парадоксальным образом именно «выжившие» оказываются существенным тормозом в изменениях образования, препятствием к тому, чтобы сделать его более полезным и привлекательным, к тому, чтобы появилось следующее поколение, достойное аналогичным позициям в общественной иерархии.

Лев Дмитриевич отлично понимал трудности в популяризации своих взглядов [1, с. 11]: «...подмечено ещё Н.В. Гоголем. В «Ревизоре» смотритель училищ Лука Лукич Хлопов говорит: «Не приведи бог служить по учёной части, всего боишься. Всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек»¹.

С некоторым раздражением Лев Дмитриевич говорит о своих «собратях по цеху»: «При обучении математике дело усложняется благодаря широкому её использованию в разнообразных областях науки и техники: нередко специалисты в этих областях совершенно искренне и бесповоротно убежде-

¹ Гоголь Н.В. Собр. соч. в пяти томах. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

ны, что они лучше других и, в частности, лучшие самих математиков знают, в чём смысл математики, как и чему учить в ней. При этом каждый, как правило, исходит из своего объёма математических знаний, считая, что надо знать именно то, что знает он, причём понимать это так, как понимает он. Странным образом забывается, что обучение людей, как и всякая другая человеческая деятельность, требует своих профессионалов».

Наконец, «... Каждый педагог, каждый специалист в своей области искренне убеждён, что он хорошо знает, что и как надо преподавать по его специальности, и обычно весьма нетерпимо относится к другим мнениям по этим вопросам» [1, с. 11].

Авторы вынуждены констатировать, что подобное явление встречается и в педагогических вузах, когда решение о выборе математического материала исходит не из потребностей школы и из нужд современной математики, а из «методических соображений».

Сказанное выше универсально, но, конечно, особенно важно для общего образования.

Если говорить об аргументах сторон, относящихся к изменениям в образовании, то выглядят естественными ссылки на «педагогический эксперимент». Например, введение ЕГЭ сопровождалось заявлениями его сторонников о том, что экзамен вводится «в порядке эксперимента». И действительно, в первый год ЕГЭ охватывал не все регионы. Не везде был обязательным и пр. Но через пару лет противники ЕГЭ начали пытаться получить официальную информацию о «результатах эксперимента» и их анализе. Введение цифровых технологий в образовательный процесс постоянно сопровождается заявлением о том, что сначала надо было бы провести лонгитюдное экспериментальное исследование и т. д. Естественно, Лев Дмитриевич рассмотрел возможность экспериментального подтверждения своих педагогических принципов. Это привело его к следующему заключению: «Следует особенно подчеркнуть ответственность

тех, кто ставит педагогический эксперимент, подчеркнуть их ответственность за выводы, которые делаются на основании этого эксперимента, и за рекомендации, которые часто даются для повсеместного их претворения в жизнь. Дело в том, что педагогический эксперимент существенно отличается от эксперимента, например, в физике, химии, биологии и т. п. Педагогический эксперимент нельзя повторить в тех же условиях, в которых он был проведён; его результат очень зависит как от индивидуальности обучаемых, так и от индивидуальности обучающихся. Одна и та же методика, успешно применённая в одном случае, может оказаться совершенно непригодной в другом, например, в руках менее искусного педагога или при другом составе учащихся. В педагогическом эксперименте очень легко увидеть то, что хочется, а не то, что есть на самом деле, в частности, и потому, что отсутствует чёткая мера для измерения результата эксперимента. Обо всём этом нельзя забывать» [1, с. 16].

Конечно, можно было бы попытаться померить результаты и строить контрольные группы, навести статистику и т. д., но веры в это будет немного. Если взять какой-нибудь педагогический журнал, то сейчас туда не возьмут статью, если в ней не будет обязательно графиков, диаграмм, статистического анализа и прочего, а будут только «разговоры». Лев Дмитриевич понимал, что его труды не возьмёт ни один педагогический журнал даже в те времена. Но он говорил: «Это неважно, я вижу, что успех имеется, вижу, что это работает. Это для меня важнее, чем любые статистические вычисления».

Основные принципы психологии обучения.

Персонализация, математическое образование для каждого

А. Д. Кудрявцев ставит вопрос: «Какими принципами следует руководствоваться, чтобы учебный процесс был наиболее успешным?» и отвечает: «Мне представляется,

что такими принципами являются следующие: внушение учащемуся уверенности в его собственных силах и помощи ему, когда это для него необходимо. Следует обратить внимание на то, что здесь нет ни слова ни о порицании, ни тем более о наказании учащихся» [1, с. 13].

Замечательно, что в подтверждение своих принципов Л.Д. Кудрявцев ссылается на «многолетнюю педагогическую деятельность учителя средней школы г. Донецка В.Ф. Шаталова, достигшего, как это хорошо известно, больших, ни с чем не сравнимых успехов в обучении своих учеников» [1, с. 13]. Хорошо известны недостатки реальной практики В.Ф. Шаталова, и они не являются предметом настоящей статьи. Для авторов важно то, что Л.Д. Кудрявцев считал источником успеха этого педагога-новатора, – формирование у ученика уверенности в своих силах.

Известно, что в более системной и массовой форме данное положение играло принципиальную роль при построении В.В. Фирсовым и его коллегами системы уровневой дифференциации [5]. Сегодня продолжается эта линия в результативном образовании [6].

Операционализированным подходом при этом является установление для каждого ученика индивидуальной системы целей и путей их достижения. Принципиальным здесь оказываются:

- обязательное достижение каждой цели;
- синхронизация движения по предметному материалу, вытекающая из экономической необходимости объединять учеников в классы (студенческие группы);
- индивидуально выбранный для каждого посильно трудный уровень предметной цели;
- выбор целей «ограничен снизу» требованием стандарта, в частности, возможностью на базе этого уровня освоения больших идей (предметных и метапредметных) и метапредметных целей.

В подтверждение своих взглядов Лев Дмитриевич ссылается на далеко не поте-

рвавшую свою актуальность Рекомендацию XIX Международной конференции по народному образованию, созванной ЮНЕСКО и Международным бюро по образованию в Женеве в 1956 г.: «...психология установила, что практически каждое человеческое существо способно к определённой степени математической деятельности и, в особенности, что нет никаких оснований утверждать, что девочки менее способны к математике, чем мальчики ...», «...математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо, каковы бы ни были его национальность, пол, положение и деятельность...» [7; 8].

Соавтор данной статьи А.А. Семёнов координировал работу по созданию концепции развития математического образования в Российской Федерации в 2012–2013 гг. В тексте концепции было написано, что всякий ребёнок способен к математике. Во время её обсуждения этот пункт вызывал наибольшие возражения со стороны учителей. Учителя подходили после обсуждения и пытались убедить докладчика: «Да нет, я знаю точно, что дети не все способны к математике. У меня в классе есть такой ребёнок, который совсем к математике неспособен».

Если быть точным, а хотелось бы тут быть математически точным, конечно, есть дети, которые неспособны, например, говорить и никогда не научатся говорить. Речь тут идёт вот о чём: если ребёнок ходит в школу и хотя бы и на тройки учится родному языку, физкультуре, рисованию и т. д., то не может быть, чтобы именно математике он был неспособен научиться. То есть если ребёнок способен учиться жизни – тому, как сходить в магазин, как накрыть на стол, как подмести на кухне, как научиться игре в лапту или подкидного дурака, то нельзя говорить о том, что он неспособен к математике. Это очень близко идеям Льва Дмитриевича: «*Основой для сформулированного утверждения об ответственности педагога является убеждение в том, что каждый нормальный человек может овладеть любым родом умственной*

деятельности, в том числе и правильным использованием математических методов, на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надёжным специалистом своего дела» [1, с. 17], и дальше он цитирует рекомендацию конференции ЮНЕСКО.

Удивительно современными звучат сегодня слова члена-корреспондента Петербургской АН Василия Петровича Ермакова из его учебника математического анализа, которого цитирует Л.Д. Кудрявцев: «Говорят, что для изучения математики нужны особые способности; это мнение ошибочно; для математики нужно логически правильное мышление. При правильном воспитании эта способность может быть развита у каждого ребёнка. Цель школьного обучения должна заключаться в развитии логически правильного мышления»².

Таким образом, именно метапредметные результаты Л.Д. Кудрявцев, следом за В.П. Ермаковым, считает приоритетными, а ведь слова Ермакова были сказаны более 100 лет назад, когда ни о какой цифровой революции не было и речи.

Проблема отбора содержания

Лев Дмитриевич также цитирует академика А.Н. Крылова: «В основу учебных планов кладутся программы. Каждая программа составляется профессором, заведующим кафедрой и преподавателями по этой кафедре, т. е. специалистами по данному предмету, и они всегда склонны изложить предмет «в полном его объёме», как бы забывая, что сами они в своей преподавательской деятельности изучали свой предмет, может быть, 15, 20, 25 лет, а то и более, а студент на изучение этого предмета может уделить лишь небольшую часть года или полугодия, ибо одновременно студенту надо изучить и ряд других предметов, в равной степени обязательных, и сдать по

ним экзамены и зачёты» [9, с. 623]. Важно здесь не мнение знаменитого академика, а то, что Л.Д. Кудрявцев старался применять эти принципы и к построению программ, и к своим курсам в элитном вузе, где он работал, а также в применении к школьным программам и стандартам.

Один из авторов данной работы – А.Л. Семёнов – участвовал в отборе содержания школьного образования в группе математиков, куда он входил вместе со Львом Дмитриевичем, Сергеем Михайловичем Никольским, Николаем Николаевичем Андреевым, Георгием Владимировичем Дорофеевым, Николаем Петровичем Долбиным. Эта группа занималась в начале 2000-х гг. разработкой математического компонента федерального стандарта школьного образования. Такой стандарт был необходим для работы школы в связи с положениями Закона об образовании 1992 г.³, но в течение десяти лет официально утверждённого стандарта не было, школы работали «по инерции». Паллиативом служили «Минимальные требования», принятые Министерством образования в конце 1990-х гг., московские школы до этого использовали региональный стандарт, разработанный по инициативе Любови Петровны Кезиной, московского министра образования, группой под руководством В.В. Фирсова, А.М. Абрамова, А.Л. Семёнова.

Работа над федеральным стандартом проходила под общим руководством министра Владимира Михайловича Филиппова и продолжалась больше двух лет. Л.Д. Кудрявцев в своей работе всё время примерялся к реальному ребёнку, реальному учителю. Он старался исходить не из чисто академических соображений – как выстроить математическое знание, а посмотреть реально, как, скажем, та или иная геометрическая теорема ляжет на конкретный образовательный процесс в школе.

² Ермаков В.П. Анализ бесконечно малых величин. Ч. 1. Киев, 1907.

³ Закон РФ «Об образовании» от 10 июля 1992 г. № 3266-1. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_1888/?ysclid=lt2mk3bwo0328506729 (дата обращения: 15.02.2024).

Школьная геометрия – прекрасная красивая наука, которую очень любил Лев Дмитриевич. Если посмотреть на содержание школьных учебников по планиметрии последних классов основной школы и посмотреть на реальный класс, то выясняется, что лучшие ученики более-менее выучивают наизусть те или иные определения и доказательства, могут их воспроизвести на экзамене или на какой-то контрольной, и дальше этого дело не идёт. То есть красота геометрии, состоящая в том, что человек сам может что-то понять, что-то построить, что-то открыть и даже что-то доказать, проходит мимо. Геометрия оказывается чем-то вроде выучивания дат из учебника истории. Поэтому выход мог бы состоять в уменьшении содержания школьного курса геометрии, оставлении в нём каких-то тем, которые наиболее ярко отражают содержание геометрического способа мышления, представления о реальности, и в то же время давали бы возможность ученику самостоятельно что-то сделать – поэкспериментировать, доказать, открыть, тем самым позволили бы ему ощутить красоту геометрии, когда человек сам её создаёт, а не просто выучивает рассуждения из учебника или со слов учителя. Поэтому в стандарте, о котором идёт речь, авторы ограничились общими формулировками, не доходя до перечисления теорем.

Лев Дмитриевич говорил, что подбор содержания – дело крайне сложное, потому что всего не сбалансируешь. Сейчас в связи с искусственным интеллектом, который является, по-видимому, главным явлением в современной цивилизации, вопрос о содержании математического образования становится особенно сложным. Как известно, для современных нейронных сетей глубокого машинного обучения не так уж много математики и нужно. В то же время эта математика близка к той, которая предлагается на младших курсах технических и педагогических вузов. Можно взять ориентацию на понимание того, «как работает ИИ», как его программировать, за основу для отбора со-

держания «высшей», выходящей за пределы элементарной, математики, которую авторы предлагают для освоения в педагогическом вузе. При этом теория могла бы подкрепляться, в первую очередь, не выполнением упражнений на первообразные «из Демидовича», а использованием библиотек Питона для выполнения интересных проектов из области искусственного интеллекта.

Личностные результаты образования

Л.Д. Кудрявцев придаёт большое значение результатам образования, которые сегодня называются личностными: «...[студентов] невозможно воспитать без воспитания высоких общечеловеческих моральных качеств: любви и уважения к людям, гуманного к ним отношения, доброты, справедливости, честности, принципиальности, самокритичности, мужества, настойчивости и скромности, добросовестного отношения к своим обязанностям, органической потребности в труде, без того, чтобы эти черты стали обычной нормой поведения. Поэтому важнейшей и наиболее трудной частью является не профессиональное обучение, а морально-нравственное воспитание» [1, с. 8]. В подтверждение своей мысли Кудрявцев ссылается на диалог Платона «Менексен», где великий грек цитирует своего учителя – Сократа: «И всякое знание, отделённое от справедливости и другой добродетели, представляется плутовством, а не мудростью» [1, с. 8].

Лев Дмитриевич перечисляет свойства, которые воспитываются внутри курса математики и которые сегодня относятся к метапредметным и личностным результатам: «Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математикой, наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическому мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализировать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобретению рациональных качеств мысли и её выражения: порядок, точность, ясность, сжатость.

Оно требует воображения и интуиции. Оно даёт чутьё объективности, интеллектуальную честность, вкус к исследованию и тем самым содействует образованию научного ума. Изучение математики требует постоянного напряжения, внимания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости и закрепляет хорошие навыки работы. Таким образом, математика выполняет важную роль как в развитии интеллекта, так и в формировании характера» [1, с. 25].

Ещё важное качество, которое подчёркивает Л.Д. Кудрявцев, – способность к дальнейшему самостоятельному образованию: *«Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством её усвоения, умением её использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию» [1, с. 22].*

Последнее качество, по мнению автора, связано с ещё одним важным свойством личности, которое можно назвать, следуя А.Г. Асмолову, термином «преадаптивность». Адаптивность – это готовность к изменениям: что-то произошло, человек к этому адаптировался. А преадаптивность – это готовность к будущим, ещё непредвиденным изменениям, к решению задач, которые человек не умеет решать и даже не знает, какие они будут [10]. И математика – идеальное место среди других школьных предметов, чтобы научиться решать задачи, которые для человека новые, которые он не знает, как решать, которые никогда не встречал, в отличие от большинства школьных предметов. В этой связи можно упомянуть олимпиаду, которая исходно была создана для начальной школы, она называется «Кенгуру»⁴, во многом спроектированная Марком Ивановичем Башмаковым [11]. Эта олимпиада для начальной школы состоит из задач, которые не похожи на задачи из школьного задачника, а являются принципиально новыми. Как правило,

каждый ребёнок в классе решает хоть одну задачку на 3 балла, но обычно кто-то доходит и до задачи на 5 баллов, которую и взрослый человек не сразу решит. Но все эти задачи абсолютно новые, непохожие на те задачи, которые ребёнок решал до этого.

Авторы полагают, что преадаптивность – одно из важнейших личностных качеств для будущего мира [13].

Личные качества учителя. Проблема отношений «ученик – преподаватель»

Замечательно, что Л.Д. Кудрявцев – выдающийся математик, «профессионал до мозга костей», предваряет своё изложение методических идей следующими словами: *«Когда говорят о преподавании какого-либо предмета, то нередко приходится слышать, что для успеха дела нужны два качества: хорошее знание предмета и (добавляют некоторые) хорошее знание языка, на котором ведётся преподавание» [1, с. 8].* В современной терминологии он говорит о предметной и метапредметной (коммуникативной) компетентностях.

И далее Лев Дмитриевич продолжает: *«Безусловно, эти качества необходимы преподавателю, но они не достаточны для того, чтобы надёжно гарантировать успешное обучение. Преподаватель, обладающий указанными качествами, при всей своей увлечённости предметом далеко не всегда сумеет научить своих учеников тому, чему хочет, и, тем более, далеко не всегда сумеет воспитать у студента нужные качества научного работника, исследователя, конструктора, инженера, учёного-организатора, педагога, врача и т. п.» [1, с. 8].* Стоит подчеркнуть, что это говорит учёный, действительно обладающий указанными качествами, окружённый коллегами, которых он сам пригласил для совместной работы.

Следующий шаг в построениях Л.Д. Кудрявцева, которые он старается представить с математической строгостью в неформа-

⁴ Кенгуру: Математика для всех // Конкурсы для школьников. URL: <https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru> (дата обращения: 26.02.2024).

лизуемой области, таков: «Процесс воспитания, как и процесс образования в целом, имеет два полюса: воспитателей-преподавателей и воспитуемых-обучающихся. Успех этого процесса, прежде всего, зависит от преподавателей, к которым поэтому должны предъявляться высокие требования. Только тот имеет право воспитывать и только тот будет это делать успешно, кто чувствует ответственность за свою работу, интересуется ею, любит её, испытывает чувство волнения за её исход, убеждён в правильности тех принципов, которыми он руководствуется, кто тактично относится к людям, умеет терпеливо выслушивать чужое мнение и ненавязчиво отстаивать собственную точку зрения, тот, кто внимателен к окружающим, заботится о них, испытывает удовольствие от общения с ними, искренне радуется их успеху, и тот, кто, когда к нему обращаются с просьбой, не ищет, как в ней отказать, а ищет пути, как её выполнить» [1, с. 8].

Таким образом, А.Д. Кудрявцев непосредственно связывает личностные результаты образования с личными качествами учителя – преподавателя: «Успех воспитательной деятельности немыслим без того, чтобы преподаватели являлись носителями всех тех качеств, которые они стремятся воспитать у студентов, чтобы отношения между преподавателями были такими, какими они хотят их видеть между студентами, чтобы они разговаривали друг с другом так, как бы они хотели, чтобы разговаривали между собой студенты, чтобы они были со студентами так же вежливы, как они хотели бы, чтобы с ними были вежливы студенты» [1, с. 9].

Наконец, А.Д. Кудрявцев обращается к проблеме необходимой системы отношений между обучающим и обучающимся: «Только при наличии контакта между студентами и преподавателями, при наличии между ними атмосферы доверия, взаимоуважения и взаимопонимания можно достичь настоящих успехов в воспитании студентов.

Само собой разумеется, что малейший оттенок фальши или ханжества в отношении преподавателей к студентам совершенно недопустим. Доброту, основанную на внимании к человеку, на заботе о нём, на доброжелательности, на альтруизме, т. е. Доброту с большой буквы, если так можно сказать, нельзя заменить «внешней добротой»...» [1, с. 9–10].

Самостоятельность, уверенность в своих силах, оптимизм по отношению к собственной студенческой судьбе Лев Дмитриевич считал абсолютно принципиальным вопросом, и такое воодушевление студента было для него ключевым элементом образовательного процесса. Внушение обучающемуся уверенности в своих силах – это ключевой вопрос, к которому Лев Дмитриевич возвращается постоянно. Он говорит, что вообще важнейшая задача математического образования – даже не достичь какого-то конкретного понимания учащимся конкретной математической теоремы или определения. Самое важное – чтобы студент понимал, что он может что-то сделать сам: может разобрать определение, может понять теорему, может привести контрпример к своему суждению, если ему скажут об этом или он сам догадается и пр. Поэтому он и говорит, что «...ни слова ни о порицании, ни тем более о наказании учащихся». Лев Дмитриевич считал, что уверенность учащегося в собственных силах должна быть главной установкой преподавателя.

При этом А.Д. Кудрявцев пишет, что, к сожалению, среди своих коллег (на знаменитой кафедре Физтеха!), среди людей, которые приходили к нему и которые работали рядом с ним, когда он уже не заведовал кафедрой, довольно трудно было найти тех, которые руководствовались бы принципами, сформулированными им, при этом подчёркивая, что не он их придумал, что это достаточно хорошо известная истина: «Если студент начинает не успевать, то его обычно порицают, бранят, отчего он часто теряет остатки веры в собственные силы. Преподаватель же, видя, что студент не справляется с требуе-

мой работой, часто приходит к убеждению, что такому студенту нецелесообразно продолжать обучение в институте, чем и обуславливается всё его дальнейшее отношение к этому студенту, которое в лучшем случае можно выразить словами «махнул на него рукой». По-настоящему преподаватель с этого момента не имеет уже морального права продолжать обучение студента, ибо научить, как правило, можно только тогда, когда веришь, что можешь это сделать» [1, с. 14].

Л.Д. Кудрявцев неоднократно обращается к вопросу об ответственности преподавателя за то, чтобы у студента получилось достичь какого-то уровня; что тройка существенно отличается от пятёрки, но эта тройка должна быть действительно тройкой, когда видно, что студент это и знает, и умеет на некотором минимальном уровне, но честно, а не натянуто: мы 3 пишем, а 2 в уме. «Гораздо более эффективными в большинстве подобных случаев являются не слова порицания, а слова одобрения. Очень важно, когда студенту трудно, отнестись к нему внимательно, найти пусть самый небольшой успех в его работе и похвалить его за это. Когда студент не выполнил работу, надо исходить не из того, что он лентяй и неспособный, а из того, что он хотел, но не смог сделать нужную работу, так как ему не хватило опыта, умения, а может быть, и времени (в результате того, что он просто не сумел, а может быть, по каким-либо причинам и не имел возможности распорядиться им нужным образом), и постараться заставить его поверить, что приобрести необходимое умение вполне в его силах» [1, с. 14].

При этом Лев Дмитриевич выделяет и «особые точки»: «Конечно, существуют студенты, которые не хотят учиться, но желают получить диплом высшего учебного заведения. Перед такими студентами преподаватель может оказаться бессильным в своём стремлении научить их тому, чему он должен их научить. Будем считать, что подобный студент представляет собой, говоря математическим языком, «особую точку». В отдельных случаях множество

подобных особых точек может оказаться довольно массивным – это, безусловно, ненормальное явление, и необходимо все силы приложить к тому, чтобы это множество оказалось пустым» [1, с. 17].

Организация образовательного процесса в мире всё ускоряющихся изменений.

Результаты и ресурсы

Итак, какова значимость идей Л.Д. Кудрявцева мире, в котором изменения никогда не были такими быстрыми, как сегодня, и никогда уже не будут такими медленными, как раньше?

Если посмотреть на ситуацию в глобальной перспективе, то на появление биологического человека потребовалась вся эволюция в миллиарды лет. Говоря о возникновении сознания, мы пользуемся линейкой в сотни тысячи лет, для появления речи потребовались десятки тысяч лет, для письменности – тысячи лет, а для появления искусственного интеллекта (автоматизации интеллектуальной деятельности человека) потребовались всего лишь десятилетия. И в связи с этим особо важным оказывается выявление каких-то инвариантных свойств Вселенной и Человека, которые позволяют нам что-то проектировать, планировать, особенно в области образования. При этом сегодня мы видим, как медленно всё менялось в 1960-е годы, и как быстро всё меняется в 2020-е. Это хорошо видно по развитию области искусственного интеллекта: в ней за 2023 г. произошло больше событий, чем за всё предшествующее время, а с 2010 по 2020 гг. – больше, чем за предыдущие 100 лет. Поэтому так трудно найти инварианты для образования.

Но Лев Дмитриевич как раз и говорил о тех вечных ценностях образовательного процесса, которые помогают нам понять, как его организовать, несмотря на быстро меняющиеся условия. По мнению авторов данного исследования, одной из таких вечных ценностей является то, что только родившийся ребёнок уже умеет учиться – он постоянно учится, он постоянно этим занимается. Это свойство –

почти биологическое и уж точно человеческое, не зависящее ни от речи, ни тем более от письменности и искусственного интеллекта. Учёный-педагог сравнивает способность учиться для человека со способностью роста для растения [1, с. 12–13]. Уже новорождённый учится многому: он учится физическому миру, учится общению с мамой, учится, как поест, как двигаться. Ему нужно общение с окружающими людьми, и он эффективно учится сложному мастерству слушания и говорения, если ему нужно писать и читать, он учится и этому, уже менее эффективно, под контролем и управлением школы и т. п. Школа эту биологическую способность учиться тому, что нужно, часто игнорирует. Школа старается научить ребёнка *так и тому*, чему и как эта школа хочет, а не *так и тому*, что и как хочется самому ребёнку. Это большая проблема, и от этого возникает неэффективность образования.

Всё это находит отражение и в размышлениях Л.Д. Кудрявцева. Он подчёркивает, что *«эффективность учения, как всякого труда, во многом зависит от его организации. В частности, обучение, протекающее таким образом, что у учащегося поддерживается постоянный интерес к изучаемому предмету, что весь процесс обучения доставляет ему удовольствие (даже тогда, когда приходится преодолевать существенные трудности), приводит не только к приобретению прочных профессиональных знаний, но и к воспитанию органической потребности в труде, к тому, что труд в дальнейшей жизни будет приносить чувство удовлетворения и искренней радости»* [1, с. 12–13].

Посмотрим, как устроен образовательный процесс: в нём, конечно, очень важно, сколько часов потрачено учителем и учеником или преподавателем вуза и студентом. Даже когда мы говорим о так называемых зачётных единицах, кредитах и прочем, то и там речь идёт об объёме содержания, но в конечном итоге измеряется этот объём в часах. С самого начала даётся установка на достижение результата, на выработку (не-

важно, как называть) знания, умения, навыка или компетенции. Однако, переходя к массовому образованию на любом уровне мы говорим не о результате, а о затратах – часов и лет учащегося или преподавателя. Ученик, студент должен «отсидеть» нужное количество уроков и «пар». Нельзя получить диплом бакалавра за два года и т. д.

Таким образом используется затратный экономический механизм, традиционный для некоторых видов планирования при советской власти – подсчитывается то, сколько мы вложили в это, сколько потратили, а не то, что мы в результате построили. И в образовании подсчитывается количество прослушанных студентом часов, а не полученные им знания и умения их применить.

Пример идеи Льва Дмитриевича, простой и конструктивной: *«...если измерять успех педагогического процесса не тем, что «начитано на лекции», а тем, что в результате усвоено студентами, то существующую во многих высших учебных заведениях традицию заканчивать чтение лекций почти перед самым началом экзаменационной сессии вряд ли можно признать целесообразной, поскольку она просто не даст студентам времени и возможности нужным образом овладеть материалом, изложенным на лекциях. Было бы гораздо полезнее, если бы между окончанием лекций, в которых излагается новый теоретический материал, и началом экзаменационной сессии был бы трёх-четырёхнедельный интервал, во время которого интенсивно велись бы практические и семинарские занятия, а для желающих проводились дополнительные консультации, читались обзорные лекции по пройденному материалу и о методах решения задач»* [1, с. 24]. Это очевидный приём, который заставляет лектора ещё раз пересмотреть содержание: может быть, где-то сократить его и представить его студентам эффективно не по количеству часов, которые потрачены, а по объёму того, что реально воспринял студент. Это простой совет, но, как известно, работают только простые вещи. Если послушать Льва Дмитриевича и

подумать про свой собственный курс: а какой материал содержится в последней лекции, в последних двух лекциях? – это может дать какие-то конструктивные решения для курса в целом. Л.Д. Кудрявцев подводит итог: «Там, где так и делается, этому сопутствует неизменный успех в усвоении студентами изучаемой дисциплины» [1, с. 24].

Ещё об одном подходе к организации образовательного процесса Л.Д. Кудрявцев говорит: «Одним из необходимых условий для получения студентом по-настоящему твёрдых знаний является наличие достаточного времени для того, чтобы он имел возможность усвоить и обдумать полученную информацию.

Чрезмерная поспешность при обучении может существенно уменьшить его пользу. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством её усвоения, умением её использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Серьёзное учение — это большой много-сторонний и разнообразный труд, далеко не всегда приятный, временами чёрный и тяжкий, по тем не менее необходимый для получения полноценного высшего образования, и преподаватели высших учебных заведений должны помочь студентам осознать это» [1, с. 22].

Объективность результатов математического образования

Лев Дмитриевич особо останавливается на ценной, как он считал, особенности математического образования: «Математика как никакая другая дисциплина даёт возможность объективно оценивать уровень знаний: учащемуся по пройденному им материалу предлагаются задачи (как имеющие алгоритмическое решение, так и требующие определённой изобретательности для их решения), которые он должен решить, и теоремы, которые он должен доказать. Только от того, решил он задачи или нет, доказал ли он теоремы или нет,

зависит оценка, которую он получит. При этом важно то, что сам экзаменующийся может установить для себя, решена задача или нет, доказана теорема или нет, т. е. сами эти факты и оценка не зависят от субъективного отношения экзаменатора, а являются объективной истиной. Поэтому при изучении математики имеются богатые возможности для воспитания чувства справедливости и объективности. <...> ... преподавание математики можно использовать для воспитания объективности, честности, справедливости, чувства красоты, добросовестности, настойчивости, любви к труду, самокритичности» [1, с. 27].

Ещё один замечательный математик, Александр Яковлевич Хинчин, также занимавшийся образованием – и вузом, и школой – написал довольно интересный текст. Это текст о воспитательной роли математики [13]. Он говорил о школьной математике и о том, что все эти качества в наибольшей степени характерны именно для математики как предмета: «...воспитание объективности, честности, справедливости, чувства красоты, добросовестности, настойчивости, любви к труду, самокритичности». Это очень важные черты воспитательной роли математики, и надо сказать, что когда к студенту предъявляются непомерные требования, мы фактически толкаем его именно в противоположность: что это – не объективность, а надо понравиться преподавателю; что это – не честность, а надо меньше или больше списать на экзамене; что нужно качать права, а не исходить из чувства справедливости и т. д. То есть довольно легко в процессе изучения этого предмета, где замечательно, в наибольшей степени могут быть сформированы эти положительные человеческие качества, попасть в ситуацию совершенно противоположную.

Ещё необходимо упомянуть здесь Николая Николаевича Константинова. Это замечательный лидер школьного образования в специализированных математических школах страны, который ушёл из жизни два года

назад, немного не дожив до 90 лет. У детей, которые учились в школах Н.Н. Константинова, возникало совершенно другое представление о существовании некоторой объективной истины, которую можно постичь самому: самому понять, как это доказывается, самому понять, правильное ли определение, самому привести примеры и т. п. Эти черты характера, которые воспитывались у учеников, были совершенно недостижимы в других школьных предметах и в других школах.

Одной из важнейших задач образования будущих учителей математики, которую постоянно должны «держат в фокусе» их преподаватели, – это воспитание такого чувства объективности математической истины и важности не потерять его в работе с будущими и сегодняшними учениками.

Новый поворот данная черта математического образования приобрела в мире цифрового, компьютерного эксперимента. Это может быть темой отдельной публикации (см., например, работу [14]). Отметим только два обстоятельства. Во-первых, школьное программирование (как в большой степени и программирование вообще) представляет собой работу с математическими объектами, математическими средствами. Во-вторых, программирование, как правило, сопровождается отладкой – процессом, в котором человек проводит эксперимент с созданным им объектом, а полученный результат эксперимента должен анализироваться и учитываться в дальнейшем.

Говоря о цифровых технологиях, Лев Дмитриевич замечательным образом обратил внимание на то, что компьютеры должны оказать влияние на то, чему и как мы учим: *«В настоящее время в результате появления быстросредствующих вычислительных машин появились качественно новые возможности использования математических методов. Они применяются ныне*

не только там, где это делалось издавна (например, в механике, физике), но и там, где двадцать – тридцать лет назад об этом не было и речи (в экономике, геологии, социологии, лингвистике, биологии, медицине, управлении и т. п.)» [1, с. 56].

Важность математики в жизни человечества растёт, потому что всё то, что нас сегодня окружает – цифровые устройства, искусственный интеллект – базируется на тех или иных математических результатах, а главное – математических методах. Человек, который проектирует интегральную схему или пишет компьютерную программу, по существу, занят математической деятельностью, он работает с математическими абстрактными объектами, не с конкретными электронными схемами, электронами, битами, байтами, зашифрованными куда-то, а с символами, с представлением о том, что такое рациональное число или действительное число, с такой-то и такой-то точностью или ещё каким-нибудь представлением числа, но всегда это математические объекты.

Участие Л.Д. Кудрявцева в формировании позиции математического сообщества и перспективы

Л.Д. Кудрявцев существенное внимание уделял и международной деятельности; уже упоминалось о том, что он цитировал труды международных конференций по математическому образованию. В какой-то период он входил и в состав исполкома Международной комиссии по математическому образованию⁵. Комиссия по математическому образованию существует уже более 100 лет – основана она в 1908 г., с участием Феликса Кляйна. Сегодня Комиссия объединяет представителей из 93 стран, включая Россию. Это всемирная организация, занимающаяся исследованиями и разработками в области математического образования на всех уровнях. Её цель – содействовать

⁵ International Commission on Mathematical Instruction, ICMI. URL: <https://www.mathunion.org/icmi> (дата обращения: 15.02.2024).

международным программам деятельности и публикациям, усилиям по улучшению качества преподавания и обучения математике во всём мире.

Исполком (*Executive Committee*) данной Комиссии – это небольшая координирующая группа (сегодня в неё входят 12 человек), которая организует конгрессы, исследования, издаёт труды по математическому образованию. В Исполком в разное время входили советские или российские учёные из Академии наук. Ниже представлено участие советских и российских учёных в Исполкоме, которое происходило с некоторыми перерывами:

1959–1962 А. Д. Александров
 1967–1974 С. Л. Соболев
 1975–1978 А. Д. Кудрявцев
 1987–1990 Л. Д. Фаддеев
 1991–1994 Ю. А. Ершов
 1999–2002 И. Ф. Шарыгин
 2003–2006 Н. П. Долбиллин
 2007–2009 А. Л. Семенов

Лев Дмитриевич Кудрявцев участвовал в работе Исполкома в 1975–1978 гг. Это дало ему возможность видения некоторой международной перспективы того, как может быть устроено математическое образование в мире. К сожалению, потребовались бы экстраординарные усилия, чтобы представитель Российской Федерации вошёл в состав Исполкома этой Комиссии в ближайшие годы.

Заключение

Многие свои идеи А. Д. Кудрявцев разработал благодаря полувековой работе в Московском физико-техническом институте. Приведённые в данной работе идеи этого выдающегося педагога-математика, учёного, методиста, сформулированные несколько десятилетий назад, являются весьма актуальными и для современной системы образования в России, а также за её пределами.

Литература

1. Кудрявцев А. Д. Современная математика и её преподавание: Учеб. пособие для вузов: 2-е изд., доп. М.: Изд-во Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 176 с. URL: <https://djvu.online/file/0DEil08XWOSmy> (дата обращения: 15.02.2024).
2. *Abylkassymova A.E.* On Mathematical-Methodical Training of Future Mathematics Teacher in The Conditions of Content Updating of School Education // *Modern Journal of Language Teaching Methods (MJLTM)*, Iran. 2018. Vol. 8. Iss. 3. P. 411–414. DOI: 10.26655/mjltm.2018.3.1
3. *Абылкасымова А.Е.* О специально-методической подготовке будущего учителя математики // Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского. Москва, МПГУ, 2016. URL: https://www.mathedu.ru/text/aktualnye_problemy_obucheniya_matematike_i_informatike_v_shkole_i_vuze_k3_2016/p236/ (дата обращения: 15.02.2024).
4. *Тоффлер Э.* Шок будущего: пер. с англ. М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. 557 с. ISBN 5-17-010706-4. URL: http://transhumanism-russia.ru/documents/books/toffler/toffler_shock.pdf (дата обращения: 15.02.2024).
5. *Фирсов В.В.* О совершенствовании методической системы обучения математике // Учим математикой. М.: Просвещение, 2012. С. 136–142. ISBN 978-5-09-026610-9. URL: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoju_2012/p136/ (дата обращения: 26.02.2024).
6. *Константинов Н.Н., Семенов А.А.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 1. С. 413–446. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
7. *Langford W.J.* 19th International Conference on Public Education, (Unesco/BIE) Geneva, July 1956 // *International Review of Education*. 1957. No. 3. P. 117–119. DOI: 10.1007/BF01417024
8. Вопросы преподавания математики на XIX международной конференции в Женеве. Рекомендация конференции министерствам народного просвещения, относящаяся к преподаванию математики в средних школах: пер. с франц. А.И. Маркушевича // Математическое просвещение. 1957. Серия 2. № 1. С. 9–22.

- URL: <https://www.mathnet.ru/php/archive.php?show=paper&jrnid=mp&paperid=376> (дата обращения 26.02.2024).
9. *Крылов А.Н.* Воспоминания и очерки. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 884 с.
 10. *Astolov A., Gusel'tseva M.* Education as a Space of Opportunities: From Human Capital to Human Potential // *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences. Psychology of Subculture: Phenomenology and Contemporary Tendencies of Development*: ed. by T. Martsinkovskaya, V.R. Orestova. 2019. Vol. 64. P. 40–45. DOI: 10.15405/epsbs.2019.07.6
 11. *Башмаков М.И.* Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2011. 297 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/bashmakov_matematika_v_karmane_kenguru_2010/p2/ (дата обращения: 26.02.2024).
 12. *Семенов А.А.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // *Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование*. 2023. Т. 21. № 2. С. 7–45. DOI: 10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45
 13. *Хинчин А.Я.* О воспитательном эффекте уроков математики // *Математическое про-*
свещение. Серия 2: Математика, её преподавание, приложения и история. 1961. № 6. С. 7–28. URL: <https://www.mathnet.ru/links/d5343cd338e5e0c12a9da3fb760114ed/mp676.pdf> (дата обращения: 26.02.2024).
 14. *Шабат Г.Б., Семенов А.А.* Компьютерный эксперимент в обучении математике // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2023. Т. 511. С. 111–137. DOI: 10.31857/S2686954323700212
- Благодарности.** Авторы благодарят профессора, академика РАО В.М. Филиппова, пробудившего в них интерес к педагогическому наследию Л.Д. Кудрявцева и написанию настоящей статьи, академика В.А. Садовниченко за плодотворное обсуждение и поддержку.
- Статья подготовлена при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант № AP19680007 (руководитель – А.Е. Абылкасымова).
- Статья поступила в редакцию 03.03.2024*
Принята к публикации 15.04.2024

References

1. Kudryavtsev, L.D. (1985). *Sovremennaya matematika i eye prepodavaniye* [Modern Mathematics and Its Teaching. Textbook for Universities]: 2nd ed., add. Moscow: Nauka Publ. Main editorial office for physical and mathematical literature, 176 p. Available at: <https://djvu.online/file/0DEil08XWOSmy> (accessed 15.02.2024). (In Russ.).
2. Abylkassymova, A.E. (2018). On Mathematical-Methodical Training of Future Mathematics Teacher in the Conditions of Content Updating of School Education. *Modern Journal of Language Teaching Methods (MJLTM)*. Iran. Vol. 8, no. 3, pp. 411-414, doi: 10.26655/mjltm.2018.3.1
3. Abylkassymova, A.E. (2016). On the Special Methodological Training of a Future Mathematics Teacher. *Current Problems of Teaching Mathematics at School and University in the Light of the Ideas of L.S. Vygotsky*. Moscow: MPSU Publ. Available at: https://www.mathedu.ru/text/aktualnye_problemy_obucheniya_matematike_i_informatike_v_shkole_i_vuze_k3_2016/p236/ (accessed 15.02.2024). (In Russ.).
4. Toffler, A. (1970). *Future Shock*. 505 p. ISBN: 0394425863, 9780394425863. (Russian translation: Moscow: AST Publ., 2002, 557 p.).
5. Firsov, V.V. (2012). [On Improving the Methodological System of Teaching Mathematics]. In: *Teaching by Mathematics*. Moscow: Prosveshchenie, p. 136-142. ISBN 978-5-09-026610-9. Available at: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p136/ (accessed 26.02.2024). (In Russ.).
6. Konstantinov, N.N., Semenov, A.L. (2022). Productive Education in Mathematical Schools. *Chebyshevskii Sbornik*. Vol. 22, no. 1, pp. 413-446, doi: 10.1134/S1064562423700369 (In Russ., abstract in Eng.).

7. Langford, W.J. (1957). 19th International Conference on Public Education, (Unesco/BIE) Geneva, July 1956. *International Review of Education*. No. 3, pp. 117-119, doi: 10.1007/BF01417024
8. Issues of teaching mathematics at the XIX International Conference in Geneva. Recommendation of the conference to the ministries of public education regarding the teaching of mathematics in secondary schools. Transl. from French A.I. Markushevich. (1957). *Matematicheskoe prosvessbchenie. Seria 2: Matematika, eye prepodavanie, prilozhenia i istoria* [Mathematics Education. Series 2: Mathematics, Its Teaching, Applications and History], No. 1, p. 15-22. Available at: <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mp&paperid=376> (accessed 26.02.2024). (In Russ.).
9. Krylov, A.N. (1956). *Memoirs and Essays*. Moscow: AN SSSR, 884 p. (In Russ.).
10. Asmolov, A., Guseitseva, M. (2019). Education as a Space of Opportunities: From Human Capital to Human Potential. In T. Martsinkovskaya, V.R. Orestova (Eds.). *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences. Psychology of Subculture: Phenomenology and Contemporary Tendencies of Development*. Vol. 64, pp. 40-45, doi: 10.15405/epsbs.2019.07.6
11. Bashmakov, M.I. (2011). *Mathematics in the Kangaroo pocket. International Olympiads for schoolchildren*. Moscow: Drofa Publ., 297 p. Available at: https://www.mathedu.ru/text/bashmakov_matematika_v_karmane_kenguru_2010/p2/ (accessed 26.02.2024). (In Russ.).
12. Semenov, A.L. (2023). On the Continuation of Russian Mathematical Education in the 21st Century. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seria 20: Pedagogicheskoe obrazovanie = Lomonosov Pedagogical Education Journal*. Vol. 21, no. 2, pp. 7-45, doi: 10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45 (In Russ., abstract in Eng.).
13. Khinchin, A.Ya. (1961). About the Educational Effect of Mathematics Lessons. *Matematicheskoe prosvessbchenie. Seria 2: Matematika, eye prepodavanie, prilozhenia i istoria* [Mathematics Education. Series 2: Mathematics, Its Teaching, Applications and History]. No. 6, pp. 7-28. Available at: <https://www.mathnet.ru/links/d5343cd338e5e0c12a9da3fb760114ed/mp676.pdf> (accessed 26.02.2024). (In Russ.).
14. Shabat, G.B., Semenov, A.L. (2023). Computer Experiment in Teaching Mathematics. *Doklady Rossijskoj Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Processy Upravleniya = Doklady Mathematics*. Vol. 511, no. 1, pp. 111-137, doi: 10.1134/S1064562423700618 (In Rus., abstract in Eng.).

Acknowledgements. The authors express gratitude to Professor, Academician of the Russian Academy of Education V.M. Filippov, who aroused their interest in the pedagogical heritage of L.D. Kudryavtsev and the writing of this article, Academician V. A. Sadovnichy for fruitful discussion and support.

The article was prepared with the support of the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant No. AP19680007 (headed by A.E. Abylkassymova).

*The paper was submitted 03.03.2024
Accepted for publication 15.04.2024*